Ферштман Вячеслав Семёнович

УДК 512.1

ЗАДАЧА ФИБОНАЧЧИ

Попытка решения старинной математической загадки

Аннотация

В статье предлагается решение известной задачи Фибоначчи (1225 г.). в которой требуется решить систему из двух квадратичных уравнений с двумя неизвестными. Решение, предложенное самим Фибоначчи, было утеряно. Предложенный автором способ вполне мог быть найден в те времена.

Ключевые слова: задача Фибоначчи.

Величайший математик средневековья Леонардо Пизанский (1180–1240) по прозвищу Фибоначчи своим творчеством оказал огромное влияние на развитие алгебры и теории чисел. Он же оставил для последующих поколений одну интересную задачу-загадку, которая почти 800 лет не имела решения в общем виде.

История этой задачи такова. При блестящем сицилийском дворе императора Священной Римской империи Германской нации Фридриха II Штауфена вместо кровавых рыцарских турниров устраивались научные диспуты. На одном из этих научных турниров придворный магистр и философ Иоанн Палермский предложил Леонардо Пизанскому две математические задачи:

I. Найти корень уравнения:

$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$

II. Найти рациональные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + a = y^2 \\ x^2 - a = z^2 \end{cases} \quad \text{при } a = 5.$$

Решить сразу эти задачи Фибоначчи не смог. Потратив много времени, он опубликовал результаты решения в двух книгах: первой задачи – в книге «Цветок» и второй – в « Книге квадратов» (1225 г.).

Нас интересует вторая задача. К сожалению, «Книга квадратов» исчезла в конце XIX века, (издана типографским способом в 1862 г.) и установить способ решения данной системы уравнений самим Фибоначчи я не смог. *Однако известно, что великий Леонардо эту систему при* $a = 5$ *решил. Его ответы таковы:*

$$z = 31/12; \; x = 41/12; \; y = 49/12.$$

Обо всём этом я узнал осенью 1973 г. Я тогда учился в Ленинградском институте Завод-Втуз при ЛМЗ. На вводной лекции по курсу «Вычислительная техника» преподаватель, говоря, что ещё не все задачи могут быть решены с помощью ЭВМ, привёл пример этой старинной задачи Фибоначчи, дал приведённые выше ответы при $a = 5$. Он сказал, что решения этой системы при других значениях a не найдены (об этом же, кроме значений x, y, z при $a = 5$, можно прочесть в энциклопедии для детей. Математика. Т. 11. М.: «Аванта+», 2002. С. 75–77).

И тогда я захотел решить данную систему уравнений в общем виде. Почти 8 месяцев напряжённых поисков решения, где я использовал известные мне методы алгебры и геометрии, ни к чему не привели.

И вдруг случилось чудо. Я в очередной раз обдумывал решение. Неожиданно, вне всякой связи с моими рассуждениями, в моей голове появились две формулы зависимостей x и a от рационального числа n. Я быстро записал полученные формулы и попробовал определить значения x, y, z и a, подставляя различные рациональные значения n. Всё получалось! Тут же нашлись и ответы Фибоначчи.

В начале 80-х по моей просьбе была составлена программа для ЭВМ, которая сосчитала величины x, y, z и a при значениях n от 2 до 200. Во всех случаях условия задачи выполнялись. Но отсутствие математической связи между неизвестно откуда взявшимся решением и системой уравнений не позволяло утверждать, что решение правильное.

Интересно, что обратившись тогда за помощью к знакомому кандидату математических наук, я получил ответ: «Решение подобных задач – это прямой путь в сумасшедший дом». Как я ни бился, найти математический вывод не удавалось. И я забросил листы с моими расчётами на дальнюю полку на долгие двадцать лет.

И произошло ещё одно чудо. Пять лет назад, случайно наткнувшись на свои записи, я попробовал ещё раз. Неожиданно математический вывод сложился! И опять я отложил задачу Фибоначчи, было не до этого. Но сейчас, когда моё время резко сжалось, я решился опубликовать решение.

Так как a может быть любым рациональным числом, я предположил, что пусть оно будет произведением трёх рациональных чисел, каждое из которых больше предыдущего на единицу. Или в виде формулы:

$$(n-1)\,n\,(n+1)=a$$

при любом рациональном $n>1$.

Раскроем скобки:

$$n^3-n^2+n^2-n=a$$

(в дальнейшем при расчёта x удобнее пользоваться формулой $n^3-n=a$).

Добавим в левую часть уравнения $\pm n$ и ± 1:

$$n^3+n+n^2+1-n^2-2n-1=a.$$

Первые две пары чисел умножим и разделим на два, а из первой пары ещё и вынесем за скобки n:

$$\frac{2n(n^2+1)}{2}+\frac{2n(n^2+1)}{2}-n^2-2n-1=a.$$

Обозначим рациональное число $x=\frac{n^2+1}{2}$ и вставим в уравнение (эта формула и $n^3-n=a$ мне пришли в голову в далёкие студенческие годы почти 40 лет назад):

$$2xn+2x-n^2-2n-1=a.$$

Заметим, что последние три числа это квадрат суммы, а из первой пары вынесем за скобки $2x$:

$$2x(n+1)-(n+1)^2=a.$$

Добавим в левую часть уравнения $\pm x^2$ и умножим обе части на -1:

$$x^2-2x\,(n+1)+(n+1)^2-x^2=-a.$$

Первые три числа это квадрат разности, а оставшиеся $-x^2$ и $-a$ перенесём в противоположные стороны уравнения:

$$[x-(n+1]^2+a=x^2.$$

Обозначим рациональное число в скобках значением z, тогда:

$$z^2+a=x^2 \text{ или } x^2-a=z^2.$$

Второе уравнение системы получилось. Теперь возьмёмся за первое уравнение системы, которое решается почти аналогично.

Записываем ту же формулу значения a:

$$(n-1)\,n\,(n+1)=a \quad \text{при } n>1.$$

Раскрываем скобки:

$$n^3-n^2+n^2-n=a.$$

Добавляем в левую часть уравнения $\pm n$ и ± 1:

$$n^3+n-n^2-1+n^2-2n+1=a.$$

Первые две пары умножаем и делим на

два, а из первой пары выносим за скобки n:

$$\frac{2n(n^2+1)}{2}-\frac{2n(n^2+1)}{2}+n^2-2n+1=a.$$

Обозначаем рациональное число $x=\dfrac{n^2+1}{2}$ и вставляем в уравнение.

Также замечаем, что последние три числа это квадрат разницы, тогда:

$$2nx-2x+(n-1)^2=a$$

или

$$2x(n-1)+(n-1)^2=a.$$

Добавляем в левую часть уравнения $\pm x^2$.

$$x^2+2x(n-1)+(n-1)^2-x^2=a.$$

Первые три числа это квадрат суммы, а значения x и a переносим в противоположные части уравнения.

$$(x+n-1)^2-a=x^2.$$

Обозначим выражение в скобках буквой y:

$$y^2-a=x^2 \text{ или } x^2+a=y^2.$$

Вышло и первое уравнение системы. На основании произведённых выкладок находим формулы зависимостей y и z от n, помня что $x=\dfrac{n^2+1}{2}$:

$$z=x-n-1=\frac{n^2+1}{2}-n-1=$$
$$=\frac{(n^2-2n+1)}{2}-1=\frac{(n-1)^2}{2}-1,$$
$$y=x+n-1=\frac{n^2+1}{2}+n-1=$$
$$=\frac{n^2+2n+1}{2}-1=\frac{(n+1)^2}{2}-1,$$
$$a=n^3-n;$$

когда $n>1$, любое рациональное число, как целое, так и дробное.

В качестве примера приведу первые 10 решений системы уравнений Фибоначчи при значениях n от 2 до 11 (см. табл. 1).

Из этой таблицы особенно интересен столбец значений при $n=9$. Запишем эти значения в виде системы уравнений Фибоначчи:

$$\begin{cases}49^2-41^2=720\\41^2-31^2=720\end{cases}$$

Разделим обе части двух уравнений системы на 144 (а это 12^2).

$$\begin{cases}49^2/12^2-41^2/12^2=720/144\\41^2/12^2-31^2/12^2=720/144\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(49/12)^2-(41/12)^2=5\\(41/12)^2-(31/12)^2=5\end{cases}$$

Вот и ответы, найденные самим Леонардо Пизанским.

Из этого примера видно, что деля или умножая обе части полученных конкретных значений на квадраты чисел, мы сможем получать и новые ряды рациональных решений.

Итак, найденные мною рациональные решения системы уравнений Леонардо Пизанского Фибоначчи в зависимости от рационального числа $n>1$ таковы:

$$a=n^3-n, \qquad x=\frac{(n^2+1)}{2},$$
$$y=\frac{(n+1)^2}{2}-1, \qquad z=\frac{(n-1)^2}{2}-1.$$

Табл. 1

y	3,5	7	11,5	17	23,5	31	39,5	49	59,5	71
z	–0,5	1	3,5	7	11,5	17	23,5	31	39,5	49
x	2,5	5	8,5	13	18,5	25	32,5	41	50,5	61
a	6	24	60	120	210	336	504	720	990	1320
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

P.S.: После предоставления статьи в редакцию журнала И.В. Романовский предложил мне посмотреть сайт http://matsmekalka.ru/?p=372. Там излагалось решение той же задачи инженером из Перми Н.В. Никифоровым, найденное в 2009 г. (см. интернет-журнал «Математическая смекалка» глава 14 от 07 января 2009 г.). Так что приоритета у меня, увы, нет. Мой пример лишний раз показывает, что тянуть с публикацией в наше время резко ускорившегося прогресса нельзя. Решение Никифорова дает несколько значений x, y, z при одном значении a, но зато мое решение проще и легче для понимания. Оба решения дают не прямую зависимость искомых x, y, z от a, а только при пересчёте через рациональное число n.

Abstract

The author gives a solution of a known Fibonacci problem (1225) how to find a rational solution of two quadratic equations with two variables. The solution proposed by Fibonacci himself was lost. The method proposed here could be found in Fibonacci's time.

Keywords: Fibonacci problem.

Феритман Вячеслав Семёнович,
старший научный сотрудник
ЗАО «Аналитцентр»,
slavawin@mail.ru